

**Recasages possibles :** 162, 171, 181, 191.

**Référence :** L'oral à l'agrégation de mathématiques, ISENMANN, PECATTE, 2ème édition (p. 93-96) et Géométrie analytique classique, EIDEN, (p. 52-53)

### Développement

**Lemme 1** Soit  $(A, B, C)$  est une base affine du plan, on note  $(X, Y, Z)$  les coordonnées barycentriques relatives à cette base. Alors, toute conique passant par  $A, B, C$  a une équation de la forme  $pYZ + qXZ + rXY = 0$ .

**Théorème 2** Si  $A, B, C, D, E$  sont cinq points distincts du plan, alors il existe une conique passant par ces points. De plus, elle est unique si et seulement s'il n'existe pas quatre points alignés parmi  $A, B, C, D, E$ . Le cas échéant, elle est non dégénérée si et seulement s'il n'existe pas trois points alignés parmi  $A, B, C, D, E$ .

- *Preuve du Lemme 1 :* Notons  $\mathcal{R}$  le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $(U, V)$  les coordonnées génériques dans ce repère. Soit  $\mathcal{C}$  une conique passant par  $A, B, C$ . Par définition, une équation de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{R}$  est donnée par

$$\alpha_1 U^2 + \alpha_2 V^2 + \alpha_3 UV + \beta_1 U + \beta_2 V + \gamma = 0.$$

Or, rappelons que si  $M$  est le point de coordonnées barycentriques  $(x, y, z)$  dans la base affine  $(A, B, C)$ , alors ses coordonnées dans  $\mathcal{R}$  sont données par  $(u, v)$  où  $u = \frac{y}{x+y+z}$  et  $v = \frac{z}{x+y+z}$ . Ainsi, en substituant dans l'équation de  $\mathcal{C}$ , puis en multipliant par  $(X + Y + Z)^2$ , on obtient

$$\alpha_1 Y^2 + \alpha_2 Z^2 + \alpha_3 YZ + \beta_1 Y(X + Y + Z) + \beta_2 Z(X + Y + Z) + \gamma(X + Y + Z)^2 = 0.$$

On voit ici que le polynôme de  $\mathbb{R}[X, Y, Z]$  définissant  $\mathcal{C}$  est homogène de degré 2 (ce qui est normal puisque les coordonnées barycentriques sont un système de coordonnées homogènes, c'est-à-dire que les triplet  $(x, y, z)$  et  $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$  désignent le même point si  $\lambda \neq 0$ ). Réécrivons donc l'équation sous la forme

$$a_1 X^2 + a_2 Y^2 + a_3 Z^2 + pYZ + qXZ + rXY = 0.$$

Comme les coordonnées barycentriques de  $A \in \mathcal{C}$  sont  $(1, 0, 0)$ , on voit que nécessairement  $a_1 = 0$ . De même,  $B$  et  $C$  étant respectivement de coordonnées barycentriques  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ , il vient  $a_2 = 0$  et  $a_3 = 0$ , ce qui conclut la preuve du **Lemme 1**.

- *Preuve du Théorème 2 :* Écartons tout d'abord un cas trivial : si les cinq points sont alignés, alors toute réunion de deux droites dont l'une contient  $A, B, C, D, E$  est une conique qui convient. On suppose donc dans la suite  $A, B, C, D, E$  non alignés. Quitte à permuter les points, on peut supposer que  $A, B, C$  sont non alignés, ils forment donc une base affine  $(A, B, C)$  du plan. Conservons les notations du **Lemme 1**. D'après ce dernier, une conique  $\mathcal{C}$  passe par  $A, B, C$  si et seulement si  $\mathcal{C}$  admet une équation barycentrique de la forme  $pYZ + qXZ + rXY = 0$ . Notons  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  des coordonnées barycentriques de  $D$  et  $E$  respectivement. Ainsi, il existe une conique  $\mathcal{C}$  passant par  $A, B, C, D, E$  si et seulement si il existe  $p, q, r \in \mathbb{R}$  non tous nuls tels que

$$\begin{cases} py_1 z_1 + qx_1 z_1 + rx_1 y_1 = 0 \\ py_2 z_2 + qx_2 z_2 + rx_2 y_2 = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

Le problème se ramène donc à trouver un triplet  $(p, q, r)$  non nul solution de ce système  $(\mathcal{S})$ . Or, ce système est de rang au plus 2, donc d'après le théorème du rang, il admet des solutions non nulles. Ceci signifie exactement qu'il existe une conique  $\mathcal{C}$  du plan contenant les cinq points  $A, B, C, D, E$ .

Montrons alors l'assertion d'unicité du théorème. S'il existe une droite  $\mathcal{D}$  contenant quatre des points  $A, B, C, D, E$ , alors toute droite  $\mathcal{D}'$  contenant le cinquième point forme une conique  $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$  qui convient, d'où la non unicité. Réciproquement, supposons que plusieurs coniques distinctes passent par les cinq points. Remarquons que si le système  $(\mathcal{S})$  est de rang 2, alors l'espace des triplets solutions  $(p, q, r)$  est une droite vectorielle, donc ne définit qu'une unique conique passant par  $A, B, C, D, E$ . En effet les équations

$$pYZ + qXZ + rXY = 0 \quad \text{et} \quad \lambda pYZ + \lambda qXZ + \lambda rXY = 0$$

définissent la même conique. Ainsi, notre hypothèse implique que le rang du système  $(\mathcal{S})$  est  $\leq 1$ . En particulier, tous ses mineurs de taille 2 sont nuls, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} y_1 z_1 & x_1 z_1 \\ y_2 z_2 & x_2 z_2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} y_1 z_1 & x_1 y_1 \\ y_2 z_2 & x_2 y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} x_1 z_1 & x_1 y_1 \\ x_2 z_2 & x_2 y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Considérons le premier mineur. Par linéarité du déterminant par rapport aux lignes, on obtient

$$z_1 z_2 \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1 z_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = z_1 z_2 \det(C, D, E) = 0,$$

où l'on a noté  $\det(M_1, M_2, M_3)$  le déterminant de la matrice dont les colonnes sont des coordonnées barycentriques des points  $M_1, M_2, M_3$ . Remarquons que cette notation n'est pas bien définie car les coordonnées barycentriques sont définies à un scalaire non nul multiplicatif près, mais la nullité de ce déterminant est indépendante du choix des coordonnées barycentriques, donc est bien définie. En considérant les deux autres mineurs, on montre de même que

$$x_1 x_2 \det(A, D, E) = 0 \quad \text{et} \quad y_1 y_2 \det(B, D, E) = 0.$$

On montre alors que deux des trois points  $A, B, C$  sont sur la droite  $(DE)$ . Supposons par exemple que  $A, B \notin (DE)$ . Alors, en particulier  $\det(A, D, E) \neq 0$ , ce qui implique que  $x_1 x_2 = 0$ . Quitte à échanger  $D$  et  $E$ , on peut supposer  $x_1 = 0$ . Alors, comme  $D \neq B$  et  $D \neq C$ , on a nécessairement  $y_1, z_1 \neq 0$ . Or, on a aussi  $\det(B, D, E) \neq 0$  donc  $y_1 y_2 = 0$  et donc  $y_2 = 0$ . Comme à nouveau  $E \neq A$  et  $E \neq C$ , on a  $x_2, z_2 \neq 0$ . Le système  $(S)$  devient alors

$$\begin{cases} py_1 z_1 = 0 \\ qx_2 z_2 = 0 \end{cases}$$

qui est un système de rang 2, ce qui est absurde car  $\text{rang}(S) \leq 1$ . Ainsi, on a  $A \in (DE)$  où  $B \in (DE)$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $A \in (DE)$ , et alors le même raisonnement que ci-dessus montre qu'on ne peut pas avoir  $B, C \notin (DE)$ . Ceci prouve que deux des trois points  $A, B, C$  sont sur  $(DE)$ , ce qui donne bien 4 points alignés et termine la preuve du cas d'unicité.

Terminons par montrer l'assertion de non dégénérescence ; on se place dans le cas d'unicité de la conique  $\mathcal{C}$  contenant les cinq points, *i.e.* dans le cas où il n'existe pas quatre points non alignés parmi  $A, B, C, D, E$ . Supposons que trois des cinq points  $A, B, C, D, E$  sont alignés sur une droite  $\mathcal{D}$ . Alors, en considérant la droite  $\mathcal{D}'$  contenant les deux autres points, on construit une conique dégénérée  $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$  passant par nos cinq points. Réciproquement, supposons que la conique  $\mathcal{C}$  est dégénérée. Alors, le déterminant de la matrice associée à la forme quadratique définissant  $\mathcal{C}$  est nul, c'est-à-dire

$$\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{vmatrix} = \frac{pqr}{4} = 0.$$

Ceci implique que l'un des réels  $p, q, r$  est nul, supposons par exemple  $p = 0$ . Alors, l'équation barycentrique de  $\mathcal{C}$  devient  $X(qZ + rY) = 0$ , qui est l'équation de la réunion de la droite  $\mathcal{D}$  définie par  $X = 0$  et de la droite  $\mathcal{D}'$  définie par  $qZ + rY = 0$ . Ainsi, on a cinq points sur la réunion de deux droites, d'où trois points alignés parmi  $A, B, C, D, E$ , ce qui conclut la preuve du **Théorème 2**.

### Commentaires et prolongements :

- On a utilisé le passage des coordonnées cartésiennes dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  aux coordonnées barycentriques dans la base  $(A, B, C)$ . Rappelons comment se justifie ce changement de coordonnées. Soit  $M$  un point du plan, de coordonnées cartésiennes  $(u, v)$  et de coordonnées barycentriques  $(x, y, z)$ . Par définition, on a

$$\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}.$$

En utilisant la relation de Chasles dans cette deuxième égalité, on écrit

$$(x + y + z)\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$$

puis  $\overrightarrow{AM} = \frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{AB} + \frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{AC}$  d'où en identifiant  $u = \frac{y}{x+y+z}$  et  $v = \frac{z}{x+y+z}$ .

Réciproquement, en partant de l'égalité  $\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$ , on voit que

$$\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AM} + u\overrightarrow{MB} + v\overrightarrow{AM} + v\overrightarrow{MB} \implies (1 - u - v)\overrightarrow{MA} + u\overrightarrow{MB} + v\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0},$$

donc  $M$  a pour coordonnées barycentriques  $(1 - u - v, u, v)$ .

- On a également utilisé le fait qu'une droite à pour équation barycentrique une équation de la forme  $aX + bY + cZ = 0$ , avec  $a, b, c$  non tous égaux. En effet, en passant en coordonnées cartésiennes, l'équation devient  $a(1 - U - V) + bU + cV = 0$ , c'est-à-dire  $(b - a)U + (c - a)V + a = 0$ . On trouve bien l'équation cartésienne d'une droite, puisque  $b - a$  et  $c - a$  ne sont pas tous les deux nuls. Réciproquement, si  $\mathcal{D}$  est une droite d'équation cartésienne  $\alpha U + \beta V + \gamma = 0$ , avec  $\alpha, \beta$  non tous les deux nuls, alors en passant en coordonnées barycentriques, puis en multipliant par  $X + Y + Z$ , on obtient  $\alpha Y + \beta Z + \gamma(X + Y + Z) = 0$ , soit

$$\gamma X + (\alpha + \gamma)Y + (\beta + \gamma)Z = 0.$$

Comme  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ , les coefficients  $\gamma, \alpha + \gamma$  et  $\beta + \gamma$  ne sont pas tous égaux, ce qui conclut.

- On peut alors justifier la condition d'alignement de trois points utilisée dans le développement par le déterminant. En effet, si  $M_i$  ( $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ) sont trois points distincts de coordonnées barycentriques  $(x_i, y_i, z_i)$  respectivement, alors on montre que la droite  $(M_1 M_2)$  a pour équation barycentrique

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & X \\ y_1 & y_2 & Y \\ z_1 & z_2 & Z \end{vmatrix} = 0.$$

pour cela, remarquons tout d'abord que l'ensemble défini par cette équation contient clairement  $M_1$  et  $M_2$  par le caractère alterné du déterminant. En développant par rapport à la dernière colonne, on voit également que cette équation équivaut à

$$X(y_1z_2 - y_2z_1) + Y(x_2z_1 - x_1z_2) + Z(x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

D'après ce qui précède, il reste à montrer que les trois coefficients qui apparaissent sont non tous égaux. Comme  $M_1 \neq M_2$ , les triplets  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  sont non proportionnels, et donc la matrice  $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$  est de rang 2. Ainsi, l'un de ses trois mineurs de taille 2 est non nul, ce qui signifie exactement que les trois coefficients qui apparaissent dans l'équation ci-dessus sont non tous nuls. Ils ne peuvent pas être tous les trois égaux car sinon l'équation serait équivalente à  $X + Y + Z = 0$ , ce qui est impossible avec des coordonnées barycentriques. Ainsi, la droite  $(M_1M_2)$  a bien pour équation l'annulation du déterminant vu plus haut, donc  $M_1, M_2, M_3$  sont alignés si et seulement si  $M_3 \in (M_1M_2)$ , ce qui équivaut bien à  $\det(M_1, M_2, M_3) = 0$ .

- Pour l'assertion de non dégénérescence, on a utilisé le déterminant de la matrice  $M$  de la forme quadratique définissant la conique  $\mathcal{C}$  en coordonnées cartésiennes. Or, *a priori*, une conique est non dégénérée si (par définition) la forme quadratique homogénéisée en coordonnées cartésienne est non dégénérée. En reprenant les notations de la preuve du **Lemme 1**, cela signifie que si on pose

$$\tilde{q}(U, V, W) = \alpha_1U^2 + \alpha_2V^2 + \alpha_3UV + \beta_1UW + \beta_2VW + \gamma W^2$$

et  $S$  la matrice de cette forme quadratique, alors  $\mathcal{C}$  est dégénérée si et seulement si  $\det(S) = 0$ . Heureusement, on a en fait  $\det(M) = \det(S)$ , ce qui justifie notre preuve. En effet, en tenant compte du fait que  $A, B, C \in \mathcal{C}$ , l'expression de  $\tilde{q}$  devient

$$\tilde{q}(U, V, W) = \alpha_1U^2 + \alpha_2V^2 + \alpha_3UV - \alpha_1UW - \alpha_2VW,$$

puis en passant en coordonnées barycentriques, les coefficients  $p, q, r$  apparaissant dans  $M$  sont donnés par  $p = \alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2$ ,  $q = -\alpha_2$  et  $r = -\alpha_1$ . Un calcul direct (par exemple par la méthode de SARRUS) donne

$$\det(M) = \frac{pqr}{4} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{4}(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2) = \det(S).$$

- Le résultat est évidemment faux avec 6 points. Une première façon de le voir est d'utiliser notre **Théorème 2**. Si  $A, B, C, D, E$  sont cinq points distincts du plan

tels que parmi eux il n'existe pas quatre points alignés, alors il existe une unique conique passant par ces cinq points. L'ajout d'un sixième point  $F$  en dehors de la conique montre bien que 5 est optimal. D'un autre point de vue, en suivant le même raisonnement que dans notre preuve du **Théorème 2**, on voit que trouver une conique passant par 6 points revient à trouver triplet  $(p, q, r)$  non nul solution d'un système de la forme

$$\begin{cases} py_1z_1 + qx_1z_1 + rx_1y_1 = 0 \\ py_2z_2 + qx_2z_2 + rx_2y_2 = 0 \\ py_3z_3 + qx_3z_3 + rx_3y_3 = 0 \end{cases}$$

Or, en choisissant bien ces points, on peut s'arranger pour que ce système soit de rang 3, donc inversible afin qu'il n'admette que le triplet nul pour solution.